Esercizi riassuntivi
Corso di Istituzioni di Matematiche
Scienze Geologiche - nuovo ordinamento

docente: prof. Alessandro Logar

March 20, 2002

1. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx; \quad \int_1^2 \frac{x+2}{x}\,dx; \quad \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\,dx; \quad \int_{-1}^0 6\sqrt[3]{x}\,dx;$$

$$\int_1^2 xe^x\,dx; \quad \int_0^1 \frac{x}{e^x}\,dx; \quad \int_\pi^{2\pi} x\cos(x)\,dx; \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$$

2. Calcolare l'area della regione del piano delimitata dalla parabola di equazione $y = 2 - 6x^2$ e dalla retta $y = x$.

3. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x^2}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx; \quad \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx.$$

4. Risolvere le seguenti equazioni differenziali e verificare l'esattezza delle soluzioni trovate:

$$y' = x(y^2+1); \quad xy' = y+x; \quad y' = 4xy; \quad y' = \tan(x)y+1; \quad y' = 3y+x^2.$$

5. La criptonite decade in ragone del 10% annuo. Trovare il suo tempo di dimezzamento.

6. Si calcoli

$$\int_0^8 \left(7 - \frac{x^2}{10}\right)\,dx$$

con il metodo dei trapezi e il metodo di Simpson, suddividendo l'intervallo di integrazione in $n = 8$ parti uguali (aiutarsi con una calcolatrice tascabile).

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da: $f(x,y) = cos(x^2y^3) + x^4y^2 - 2$. Calcolare le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da: $f(x,y) = x^4 \sqrt[3]{y^2}$. Calcolare il gradiente di f.

9. Delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ calcolare i punti critici e i massimi e minimi relativi:
$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$;
$f(x,y) = 4x^2y - x + y$.

10. Calcolare
$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy$$
ove $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 2\}$

11. Sia D il dominio di $\mathbb{R}^2$ definito da: $D = \{ \ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 2; \ x+1 \leq y \leq 2x+3 \ \}$. Calcolare il seguente integrale:
$$\iint_D e^x \frac{4y}{x+2} \, dx \, dy.$$

12. Calcolare i seguenti integrali doppi:
$$\iint_D (3x + xy) \, dx \, dy, \quad \text{dove } D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, \ x \leq y \leq 2x+1\}$$
$$\iint_D \sin(x+y) \, dx \, dy, \quad \text{dove } D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2\}$$

13. Sia $D = \{(x,y) \ \mid \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2\}$. Calcolare:
$$\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy, \quad \iint_D (x + 3y^2) \, dx \, dy, \quad \iint_D \frac{x+y}{x+1} \, dx \, dy.$$

14. Sia D il semi-disco di centro l'origine e raggio 1 disposto nel primo e secondo quadrante. Calcolare i seguenti integrali:
$$\iint_D (x+y) \, dx \, dy, \quad \iint_D x \, dx \, dy, \quad \iint_D (y+3) \, dx \, dy.$$

15. Dato il numero complesso $z = 5 + 12\,\mathrm{i}$ si calcoli: il suo modulo, il suo complesso coniugato, il suo opposto e il suo inverso.

16. Rappresentare sul piano di Gauss i seguenti numeri complessi:
$$2 + 4\,\mathrm{i}; \quad 2 + 6\,\mathrm{i}; \quad 4 + 10\,\mathrm{i}$$
e verificare che il terzo si ottiene dai primi due con la "regola del parallelogramma".

17. Trovare il valore delle seguenti espressioni (ossia scriverle nella forma $a + \mathrm{i}b$):
$$\frac{1+\mathrm{i}}{(2-3\mathrm{i})(\mathrm{i}-1)}; \quad \frac{(\mathrm{i}+1)^3}{(\mathrm{i}-1)^2}$$

18. Calcolare $e^{\pi/2 + \pi\,\mathrm{i}}$.

19. Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi e rappresentarli sul piano di Gauss:

$$2, -2, 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Si trova una qualche regolarità nel disegno? Perchè?

20. Provare che vale:

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

(Suggerimento: cosa succede dell'identità: $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ se si elevano entrambi i membri ad n?)

21. Siano z_1, z_2 e z_3 le tre soluzioni (in $\mathbb{C}$) dell'equazione $x^3 - 8 = 0$. Verificare che una di esse è un numero reale e che le altre due sono complesse coniugate.

22. Trovare tutte le soluzioni (reali e complesse) della seguente equazione: $(x^4 - 1)(x^3 - 1) = 0$.

23. Risolvere le seguenti equazioni differenziali (omogenee):

$$y'' - 4y' + 5y = 0; \quad y'' - 9y = 0; \quad y'' + 6y' + 9y = 0;$$

$$z''(t) + 4z'(t) + 5z(t) = 0; \quad y'' + 9y = 0; \quad y'' - 2y' + 10y = 0;$$

$$x''(t) - x'(t) + x(t) = 0; \quad x''(t) - x'(t) + x(t) = 0; \quad x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0;$$

24. Risolvere le seguenti equazioni differenziali (non omogenee):

$$y''(u) - 3y'(u) + 2y(u) = u + 1; \quad y'' + 16y = \cos(x); \quad y'' + 2y' - 3y = e^{2x};$$

$$x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = t^2; \quad z''(u) - 4z(u) = \sin(u) + \cos(u).$$

25. Dire quali dei seguenti insiemi sono aperti e nei casi che non lo sono individuare i punti interni:

    (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq 0\}$
    (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0\}$
    (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$
    (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 2\}$
    (e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + (y-3)^2 < 1\}$

    Questi ultimi due insiemi sono dei sottoinsiemi particolari del piano che abbiamo incontrato, quali?

26. Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

    (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = 2x - 3y + 5$
    (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = x^2 - 3xy + 5y^2 + 5$
    (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = (2x - 3y)^2 + 5$
    (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \cos(xy)$

(e) $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\} \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = xy^3 - \log(y^3)$
(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$
(g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = (\sin x)^2$
(h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{1+y^2}$
(i) $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y > 0\} \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \sqrt{x+y}$
(j) $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy \neq 0\} \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \sqrt[5]{x^2y}$

27. Sia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{data da} \quad f(x,y) = \log(x^2+y^2+1);$$

calcolare

(a) il gradiente di f nel punto $(0,0)$
(b) il gradiente di f nel punto $(1,2)$
(c) il piano π che è tangente a f nel punto $(0,0)$
(d) il piano π' che è tangente a f nel punto $(1,2)$
(e) un versore u ortogonale a π
(f) un versore u' ortogonale a π'
(g) l'angolo formato dal vettore $(0,1,0)$ con u
(h) il coseno dell'angolo formato dal vettore $(0,1,0)$ con u'
(i) si calcoli la derivata direzionale di f in $(0,0)$ lungo le seguenti direzioni $(0,1)$ $(-1,0)$ $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $(\sqrt{3}/2, 1/2)$
(j) si calcoli la derivata direzionale di f in $(1,2)$ lungo le seguenti direzioni $(0,1)$ $(-1,0)$ $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $(\sqrt{3}/2, 1/2)$

28. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad g(t) = (2\cos t, \sin t)$ una curva differenziabile e

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

(a) Calcolare il vettore velocità di g.
(b) Verificare che g parametrizza la curva di livello 1 di g.
(c) Verificare che il vettore velocità di g per $t = 0$ e ortogonale al gradiente di f in $(2,0)$.

29. Calcolare i massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 6xy$
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$
(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = xy + x^2 + y^2 + 3x - 3y + 4$
(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = xy + x^2 + 3x + 2y + 5$

30. Calcolare la retta di regressione relativa ai punti $(-1,2)$ $(0,1)$ e $(3,-1)$.

31. Le poste americane accettano solo pacchi a forma di parallelepipedo con altezza x, larghezza y e profondità z tali che $2x + y + 2z = 12\,cm$. Quali saranno le dimensioni tali che la capienza (il volume) del pacco sia massimo?