

### Esercizi

1. Dati i 3 vettori  $v_1, v_2, v_3 = (1, 2, -4), (2, 4, -1), (8, 16, -11) \in \mathbb{Q}^3$  provare che sono linearmente dipendenti (su  $\mathbb{Q}$ ) e calcolare  $\lambda, \mu$  tali che  $v_1 = \lambda v_2 + \mu v_3$

2. Data la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 - a & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2a \end{pmatrix}$$

trovare per quali valori di  $a$  è singolare. Calcolare poi  $M$  valutata in  $a = 3$  e trovare l'inversa di questa matrice.

3. Date le matrici:

$$M_1 = \begin{pmatrix} x - 1 & x + y & y + 2 \\ x - y & x + 3y & y - 2 \\ 0 & 2x & -y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2x & 0 & y \\ y & x & y \\ x - y & y & x \end{pmatrix}$$

dire per quali valori di  $x, y$  sono contemporaneamente singolari.

4. Sia  $a = 1000!$ . Con quanti zeri termina il numero  $a$ ? (per saperlo è necessario calcolare il fattoriale?)
5. Trovare quanti sono i numeri naturali fino a 10000 che sono ottenibili come somma di due cubi di interi in più di un modo (ad es.  $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ ).
6. Sia  $K$  il campo finito  $Z_7$ . Trovare tutti i polinomi di  $K[x]$  di grado 3 che sono primi con  $f = x^3 + 3x + 1 \in K[x]$ .
7. Scrivere una funzione che, dato un numero intero  $n$ , lo esprime, se possibile, come somma di due quadrati, trova cioè, se esistono, due interi  $a, b$  tali che  $n = a^2 + b^2$  (esiste già in Sage la funzione `two_squares`, ma ignorarla). Cercare poi di capire, con un po' di esperimenti, quali sono i numeri primi che si possono scrivere come somma di 2 numeri quadrati. Infine cercare di capire quali numeri interi sono somma di due quadrati.