Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2020–21
Scritto 7 settembre 2021

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Dopo aver provato, usando Berlekamp, che il polinomio $x^2+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ è irriducibile, considerare il campo $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$ e trovare tutti i suoi elementi primitivi.

2. Sia $I = (x+1, y+3) \subseteq \mathbb{Z}_5[x, y]$. Provare che l'ideale I è massimale.

3. Sia
$$f(x) = x^5 + 6ax^4 + 15x^3 + (a^3 - a)x + 6 \in \mathbb{Z}[x]$$
dove $a \in \mathbb{Z}$. Per quali valori di a il polinomio $f(x)$ è irriducibile?

4. Sia K un campo. Sapendo che l'anello $A = K \times K$ (dove la struttura di anello è data con le operazioni definite componente per componente) ha esattamente 53 divisori dello zero, dire a chi è isomorfo il campo K (ricordare che anche 0 è da considerare un divisore dello zero).