

Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2022–23
Scritto 6 settembre 2023

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia $a \in \mathbb{C}$ e sia $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Provare che se a è algebrico su K , allora a è anche algebrico su \mathbb{Q} .
2. Il polinomio $7x^5 - 42x^3 - 63x^2 + 21$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$? E in $\mathbb{Q}[x]$?
3. Sia K un campo. Mostrare che ogni ideale di $K[x]$ è principale.
4. Sia A un anello commutativo unitario e siano I e J due ideali principali di A . Si consideri l'insieme $X = \{ab \mid a \in I, b \in J\}$ e sia U l'ideale generato da X . Provare che U è principale.
5. Dire quanti fattori irriducibili ha il polinomio

$$x^{72} + 2x^{36} + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$