**Corso di laurea in Matematica**
**Algebra2**
**a.a. 2021–22**
**Scritto 6 settembre 2022**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia $A$ un anello commutativo unitario. Sia $X = \{a_1, \ldots, a_k\}$ un sottoinsieme di $A$. Dire di che forma sono sono gli elementi di $(X)$ (cioè dell'ideale generato da $X$).

2. Si consideri in $\mathbb{Z}[x]$ l'insieme $I = \{5a + xb \mid a, b \in \mathbb{Z}[x]\}$. Si provi che:

   (a) $I$ è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$;

   (b) $x, 5 \in I$, $1 \notin I$;

   (c) Quanti elementi ha $\mathbb{Z}[x]/I$?

3. Dopo aver brevemente spiegato perchè il polinomio $f = x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ è irriducibile, trovare l'inverso di $[x + 1] \in \mathbb{Q}[x]/(f)$.

4. Sia $f : \mathbb{Q}[x, y] \longrightarrow \mathbb{Q}$ data da: $f(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$; $f(x) = 2$, $f(y) = 3$ ed estesa in unico modo ad omomorfismo di anelli. Dire chi è il nucleo di $f$.

5. Sia $a \in \mathbb{C}$ algebrico su $\mathbb{Q}$. Provare che anche $a + 3$ è algebrico su $\mathbb{Q}$. Se $a$ è di grado $n$, che grado ha $a + 3$?