

**Algebra 2**  
**Corso di laurea in Matematica**

6 febbraio 2024

Risolvere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate (possibilmente in modo sintetico ...).

1. Sia  $A$  un dominio d'integrità finito. Provare che allora  $A$  è un campo.
2. Quanti polinomi di grado  $n$  ha l'anello dei polinomi  $\mathbb{Z}_4[x]$ ? Trovare tutti i divisori dello zero di grado 1 di  $\mathbb{Z}_4[x]$ .
3. Dire se il polinomio  $x^4 + 2x^3 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$  ha fattori multipli e trovare (usando l'algoritmo di Berlekamp) il numero dei suoi fattori irriducibili.
4. Sia  $I$  l'ideale di  $\mathbb{Q}[x, y]$  dato da  $(x + 2y, 3x - y)$  e, analogamente, sia  $J = (x, y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ . Provare che  $I = J$ . Provare che se  $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$  è un polinomio il cui termine noto è non nullo, allora  $f$  non sta nell'ideale  $I$ .
5. Provare che  $\mathbb{Q}[2 + 4\sqrt{5}] = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ .