Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2018–19
Scritto 3 settembre 2019

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia $C_2 = \{1, a\}$ il gruppo moltiplicativo ciclico di ordine 2 (quindi $a^2 = 1$) e sia $G = S_3 \times C_2$ (dove S_3 è il gruppo delle permutazioni di 3 elementi). Trovare tutti i 2-sottogruppi di Sylow di G. Mostrare che il loro numero è coerente con quanto previsto dai teoremi di Sylow.

2. Usando opportune proprietà di $\mathbb{Z}_2[x]$ e l'algoritmo di Berlekamp, scomporre in fattori irriducibili il polinomio:

$$x^{12} + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$$

3. Dire se l'ideale $(x-3, y^2-5) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ è massimale e giustificare la risposta.

4. Siano K ed L campi, con L estensione di K. Provare che se $[L : K] = n$ con n numero finito, allora L è un'estensione algebrica di K.

5. Sia A un anello commutativo unitario, tale che $a^4 = a$ per ogni $a \in A$. È vero che allora in A ogni ideale primo è anche massimale?