

**Corso di laurea Matematica**  
**Algebra 2**  
**a.a. 2019–20**  
**Scritto 22 settembre 2020**

Partecipando a questa sessione di esame, accetto di rispettare le seguenti norme di comportamento:

- Le risposte all'esame saranno svolte solo da me.
- Non renderò disponibili a nessun altro le mie risposte.
- Mi impegno a non consultare persone o materiali di qualsiasi tipo (libri, appunti, siti, ...).

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia  $a \in \mathbb{C}$  algebrico su  $\mathbb{Q}$ . Provare che anche  $2a - 1$  è algebrico su  $\mathbb{Q}$ .
2. Sia  $A$  un anello in cui ogni ideale è principale. Sia poi  $I$  un ideale di  $A$ . Provare che anche ogni ideale di  $A/I$  è principale.
3. Sia  $G$  un gruppo con 77 elementi. Dire quanti sottogruppi normali ha  $G$ .
4. Sia  $K$  un campo. Sia  $f : \mathbb{Q}[x, y] \rightarrow \mathbb{Q}$  definita da  $f(a) = a$  per ogni  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $f(x) = 0$  e  $f(y) = 2$  e poi estesa nell'unico modo possibile in modo da essere omomorfismo di anelli. Trovare il nucleo di  $f$ .