

**Corso di laurea Matematica**  
**Algebra 2**  
**a.a. 2019–20**  
**Scritto 20 luglio 2020**

Partecipando a questa sessione di esame, accetto di rispettare le seguenti norme di comportamento:

- Le risposte all'esame saranno svolte solo da me.
- Non renderò disponibili a nessun altro le mie risposte.
- Mi impegno a non consultare persone o materiali di qualsiasi tipo (libri, appunti, siti, ...).

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia  $G$  un gruppo e sia  $C = \{c \in G \mid gc = cg \ \forall g \in G\}$  il suo centro. Provare che  $C$  è un sottogruppo abeliano di  $G$  ed è normale.
2. Sia  $L : K$  un'estensione finita di campi, tale che  $[L : K] = p$  con  $p$  numero primo. Sia  $a \in L \setminus K$ . Che grado ha il polinomio minimo di  $a$  su  $K$  e perché?
3. Sia  $A = \mathbb{Z}_4[x]/(x^2)$ . Quanti elementi ha l'anello  $A$ ? Trovare gli elementi invertibili di  $A$ .
4. Sia  $f(x) = x^3 + 3ax + 2b \in \mathbb{C}[x]$ . Per quali valori di  $a$  e  $b$  il polinomio ha radici multiple?