

**Corso di laurea Matematica**  
**Algebra 2**  
**a.a. 2021–22**  
**Scritto 19 luglio 2022**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Con  $S_3$  si indica il gruppo delle permutazioni di tre oggetti. Dire quanti sono i 2-sottogruppi di  $S_3$ , i 3-sottogruppi di  $S_3$  e i 5-sottogruppi di  $S_3$ . Quali sono i sottogruppi normali di  $S_3$ ?
2. Sia  $L : K$  un'estensione finita di campi, tale che  $[L : K] = 2p$  con  $p$  numero primo. Sia  $a \in L \setminus K$ . Mostrare che  $a$  è algebrico su  $K$ . Dire quanto può valere  $[L : K[a]]$  e dire quali sono i possibili gradi del polinomio minimo di  $a$  su  $K$ .
3. Si consideri il polinomio  $q = x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ . Dopo aver provato con il metodo di Berlekamp che  $q$  è irriducibile, si trovi un elemento primitivo del campo  $K = \mathbb{Z}_3[x]/(q)$ .
4. Sia  $f(x) = 2ax^3 + 3ax^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$  (con  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ ). Per quali valori di  $a$  il polinomio ha fattori multipli?