

**Corso di laurea Matematica**  
**Algebra 2**  
**a.a. 2022–23**  
**Scritto 16 gennaio 2023**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia  $A$  un anello con un numero finito di elementi. Provare che gli elementi di  $A$  o sono divisori dello zero, o sono invertibili.
2. Trovare tutte le soluzioni in  $\mathbb{Z}$  del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{3} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \\ x \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

3. Sia  $G$  un gruppo di ordine 143. Dire quanti sottogruppi normali ha  $G$ .
4. Trovare tutti i divisori dello zero dell'anello  $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 4x + 3)$ .
5. Sia  $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ . Provare che  $K$  è un campo perfetto. Trovare un elemento  $a \in K$  tale che  $a^3 = 2x + 1$ .