Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2020–21
Scritto 15 giugno 2021

Partecipando a questa sessione di esame, accetto di rispettare le seguenti norme di comportamento:

- Le risposte all'esame saranno svolte solo da me.
- Non renderò disponibili a nessun altro le mie risposte.
- Mi impegno a non consultare persone o materiali di qualsiasi tipo (libri, appunti, siti, ...).

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Usando il metodo di Berlekamp, provare che il polinomio $x^4+x+2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ è irriducibile.

2. Sia G un gruppo finito con 57 elementi. Quanti sono i sottogruppi normali di G?

3. Provare che l'ideale $\mathcal{M} = (x+1, y+2) \subseteq \mathbb{Z}_{11}[x, y]$ è un ideale massimale. Trovare poi un ideale primo $\mathcal{P}$ di $\mathbb{Z}_{11}[x, y]$ non nullo che sia contenuto propriamente in $\mathcal{M}$.

4. Trovare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ del numero reale:
$$a = \sqrt{\sqrt{7}+1}$$

5. Dopo aver spiegato velocemente perché l'anello quoziente
$$K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$$
è un campo, trovare l'ordine dell'elemento $[x]$ nel gruppo $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ e trovare infine un elemento primitivo di K.