

**Corso di laurea in Matematica**  
**Algebra 2, a.a. 2018–19**  
**Scritto 11 giugno 2019**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia  $G$  un gruppo finito di ordine 405. Spiegare perché  $G$  ha un solo sottogruppo  $H$  di ordine 81. Che proprietà ha  $H$ ?
2. Usare il metodo di Berlekamp per fattorizzare il polinomio  $f = x^3 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ .
3. Sia  $f : \mathbb{Q}[x, y] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$  data da:  $f(a) = a$  per ogni  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $f(x) = 1$ ,  $f(y) = 3$ . Trovare il nucleo di  $f$ .
4. Dare un esempio di campo finito con 16 elementi.
5. Sia  $L : K$  un'estensione di campi. Sia  $a \in L$  algebrico su  $K$ . Dimostrare che  $K[a] = K(a)$ .