Algebra 2

Esercizi 1 - 9 ottobre 2022

1. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Si definisca su G la seguente relazione:
$$g\,\mathcal{R}\,h \text{ se e solo se } gh^{-1} \in H$$
Provare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza (quindi provare che è riflessiva, simmetrica e transitiva).

2. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Se $g \in G$, ricordare che con Hg si indica l'insieme $\{hg \mid h \in H\}$. Provare che $Hg_1 = Hg_2$ se e solo se $g_1 g_2^{-1} \in H$.

3. Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo normale di G. Sia G/H l'insieme dei laterali destri di H in G, quindi gli elementi di G/H sono della forma Hg con $g \in G$. Provare che con l'operazione sugli elementi di G/H definita da $(Hg_1) \cdot (Hg_2) = H(g_1 \cdot g_2)$, l'insieme G/H diventa un gruppo.

4. Sia G un gruppo, H un sottogruppo normale di G e sia U un sottogruppo di G/H. Provare che $\pi^{-1}(U)$ è un sottogruppo di G che contiene H (dove $\pi : G \longrightarrow G/H$ è l'epimorfismo canonico).

5. Sia $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un omomorfismo di gruppi. Provare che f è un monomorfismo se e solo se $\ker(f) = \{1_{G_1}\}$.