Algebra 2

Esercizi 11 - 8 dicembre 2023

1. Siano A e B anelli (commutativi, unitari), con A sottoanello di B. Ricordare che $A[c_1, \ldots, c_n]$ significa “il più piccolo anello che contiene l'anello A e gli elementi $c_1, \ldots, c_n \in B$”. Siano $b_1, b_2 \in B$. Provare che vale: $A[b_1 + b_2, b_1 - b_2] = A[b_1, b_2]$.

2. Sia L un campo, estensione di K. Ricordare che un elemento $a \in L$ si dice algebrico su K se esiste un polinomio non nullo, a coefficienti in K che ammette a come radice. Se $a \in L$ è algebrico su K, il grado del polinomio minimo di a su K si dice grado dell'elemento algebrico. Provare che ogni elemento di K è algebrico su K e dire di quale grado.

3. Provare che $\mathbb{Q}[2 + 4\sqrt{7}] = \mathbb{Q}[\sqrt{7}]$.

4. Sia L un campo, estensione di K. Sia $a \in L$ e si supponga che esiste un polinomio $f(x) \in K[x]$ monico e irriducibile tale che $f(a) = 0$. Provare che allora f è il polinomio minimo di a su K.

5. Si provi che l'elemento $\sqrt[3]{2 + \sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$. Trovare il suo polinomio minimo.

6. Provare che il numero $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ è algebrico di grado 2 su $\mathbb{Q}$.

7. Si consideri l'elemento $\lambda = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Provare che è algebrico di grado 2. Si costruisca poi l'isomorfismo ϕ tra $\mathbb{Q}[\lambda]$ e $\mathbb{Q}[x]/(m(x))$, dove $m(x)$ è il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di λ e si mostri come si può passare da un elemento di $\mathbb{Q}[x]/(m(x))$ a un elemento di $\mathbb{Q}[\lambda]$ e viceversa usando l'isomorfismo. Si descriva il campo $\mathbb{Q}[\lambda]$ come un insieme di coppie (a, b) di elementi $a, b \in \mathbb{Q}$ con delle opportune operazioni di somma e prodotto sulle coppie.

8. Si consideri il seguente insieme $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e su di esso si definisca una somma nel seguente modo:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e un prodotto così:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 5\, bd, ad + bc)$$

Succede (verificarlo, se si vuole) che K, con queste due operazioni, diventa un campo. Si consideri poi l'elemento $\eta = (0, 1)$. Quanto vale η^2? Come si può usare η per vedere che K è isomorfo all'anello di polinomi $\mathbb{Q}[x]$ quozientato su un polinomio irriducibile?