ALGEBRA 2

Esercizi 1 - 7 ottobre 2019

1. Siano $(G_1, \cdot)$ e $(G_2, \cdot)$ due gruppi. Sull'insieme prodotto $G_1 \times G_2$ si definisca il *prodotto puntuale* dato da: $(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) \stackrel{\text{def}}{=} (g_1 \cdot h_1, g_2 \cdot h_2)$. Provare che l'insieme G con questo prodotto risulta un gruppo.

2. Sia G definito come sopra, provare che l'insieme $H = \{(g, 1_{G_2}) \mid g \in G_1\}$ è un sottogruppo normale di G. Chi è G/H?

3. Siano G_1 e G_2 due gruppi e sia $H_1 \lhd G_1$ un sottogruppo normale di G_1 e $H_2 \lhd G_2$ un sottogruppo normale di G_2. È vero che $H_1 \times H_2$ è un sottogruppo normale di $G_1 \times G_2$?

4. Sia $n \in \mathbb{N}$ fissato e sia $G = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid (a + ib)^n = 1\}$. Provare che G è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ (cioè del gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli). (Suggerimento: è utile conoscere le formule di de Moivre). Che tipo di gruppo è G?

5. Sia $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con l'operazione di somma definita puntualmente (analogamente a quanto fatto nel primo esercizio). Sia $H = \{(2a, 3a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Provare che H è sottogruppo di G. Il sottogruppo H è normale? Chi è G/H?

6. Si considerino le seguenti tre matrici (a coefficienti in $\mathbb{C}$):

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Osservato che sono tre elementi di $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$, trovare il loro ordine.

   (b) Sia G_1 il gruppo generato da M_1 e M_2. Quanti elementi ha G_1?

   (c) Sia G_2 il gruppo generato da M_2 e M_3. Quanti elementi ha G_2?

   (d) Gli elementi di G_1 e di G_2 possono essere pensati come delle proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (nel seguente modo: se $M \in G_2$, al punto $P(x, y, z) \in \mathbb{P}^2$ la proiettività data da M associa il punto $M\,{}^t(x, y, z)$). Far vedere che i gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi, rispettivamente, al gruppo delle permutazioni S_3 e al gruppo diedrale D_4, delle simmetrie di un quadrato.[1] (In alternativa, se non si ha familiarità con la geometria proiettiva, pensare agli elementi di G_1 e G_2 come matrici di cambiamento di coordinate nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$).

---

[1] Suggerimento: Considerare i punti: $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ e l'effetto delle matrici di G_1 e G_2 su tali punti.