Algebra 2

Esercizi 4 - 7 novembre 2020

1. Il teorema di unicità di quoziente e resto nella divisione di un polinomio g per un polinomio f in $A[x]$ richiede che il coefficiente direttivo di f sia invertibile. Si considerino ora i seguenti polinomi in $\mathbb{Z}_8[x]$: $f = 2x + 1$, $g = 4x + 1$. Scrivere $g = qf + r$ in due modi diversi (con $\deg(r) < \deg(f)$) (ovviamente in questo caso il coefficiente direttivo di f non è invertibile).

2. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'omomorfismo di valutazione che valuta x in 7, cioè ϕ è dato da $\phi(a) = a$ per $a \in \mathbb{Q}$ e $\phi(x) = 7$ (ed esteso nell'unico modo possibile). Calcolare $\ker(\phi)$.

3. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'omomorfismo di valutazione che valuta x in $\sqrt{2}$. Calcolare $\ker(\phi)$.

4. Quali sono i fattori irriducibili del polinomio $x^4 + 1 \in \mathbb{R}[x]$?

5. Si ricordi che in un anello A, un ideale proprio I si dice *primo* se vale la seguente condizione: se $ab \in I$, allora $a \in I$ o $b \in I$. Provare che un numero $p \in \mathbb{Z}$ è primo se e solo se l'ideale (p) è un ideale primo.

6. Si ricordi che in un anello A, un ideale I si dice *massimale* se $I \neq (1)$ e se J è un ideale che contiene propriamente I, allor $J = (1)$. Provare che in $\mathbb{Z}$ e in $K[x]$ (con K campo) un ideale è primo se e solo se è massimale.