

ALGEBRA 2
Esercizi 9 - 6 dicembre 2022

1. Usando Berlekamp, fattorizzare il seguente polinomio:

$$f(x) = x^4 - 1 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

2. Trovare i fattori irriducibili di $x^{p^2} - x^p \in \mathbb{Z}_p[x]$ (non usare Berlekamp).
3. Trovare, usando Berlekamp e anche il fatto che $(a + b)^p = a^p + b^p$ in un anello di caratteristica p , la fattorizzazione del polinomio $x^{80} + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.
4. Trovare tutti gli ideali primi \mathcal{P} di $\mathbb{Q}[x]$ che contengono l'ideale $(x^2 - 1) \subseteq \mathbb{Q}[x]$.
5. Sia I un ideale di un anello A e sia $I[x]$ definito da:

$$I[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in I\}.$$

Provare che $I[x]$ è un ideale di $A[x]$. Provare poi che l'anello quoziente $A[x]/I[x]$ è isomorfo all'anello di polinomi $(A/I)[x]$.