ALGEBRA 2

Esercizi 2 - 5 ottobre 2023

1. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ primi tra loro (quindi $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$). Sia $c \in \mathbb{Z}$. Provare che se a divide bc, allora a divide c. (Trovare una soluzione al problema che usa l'identità di Bezout).

2. Usare il risultato dell'esercizio precedente per provare che se a e b sono due interi primi tra loro e se entrambi dividono un numero intero m, allora il loro prodotto divide m. Fornire un esempio per mostrare che il risultato non è vero se a e b non sono coprimi.

3. Calcolare il $\operatorname{mcd}(20, 32)$ usando le divisioni successive. Detto d tale massimo comun divisore, trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ in modo che valga $d = 20\alpha + 32\beta$. Trovare poi tutte le soluzioni (a, b) dell'equazione $20a + 32b = d$ (con $a, b \in \mathbb{Z}$).

4. Il gruppo G ha 12 elementi: $1, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ che si moltiplicano tra loro secondo la seguente tabella di moltiplicazione:

$\cdot$	1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
1	1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	a	1	c	b	g	f	e	d	j	k	h	i
b	b	c	1	a	e	d	g	f	k	j	i	h
c	c	b	a	1	f	g	d	e	i	h	k	j
d	d	e	f	g	h	i	j	k	1	a	b	c
e	e	d	g	f	k	j	i	h	b	c	1	a
f	f	g	d	e	i	h	k	j	c	b	a	1
g	g	f	e	d	j	k	h	i	a	1	c	b
h	h	i	j	k	1	a	b	c	d	e	f	g
i	i	h	k	j	c	b	a	1	f	g	d	e
j	j	k	h	i	a	1	c	b	g	f	e	d
k	k	j	i	h	b	c	1	a	e	d	g	f

   (la tabella va letta in questo modo: il prodotto $x \cdot y$ è dato dal punto d'incontro della riga che comincia con la x con la colonna che ha per primo valore in alto la y. Ad esempio $c \cdot e = g$). Provare che il gruppo G non è commutativo. Trovare l'ordine dell'elemento a e dell'elemento d. Provare che il sottoinsieme $H = \{1, a, b, c\}$ di G è un sottogruppo. Trovare i laterali destri di H e i laterali sinistri. Verificare che H è normale. Trovare la tabella di moltiplicazione del gruppo G/H.
   Sia $K = \{1, a\}$. Provare che K è un sottogruppo di G. Trovare i laterali destri di K. Calcolare Kd e dK e dedurre che K non è un sottogruppo normale.

5. Sia $G = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$. Provare che G è un sottogruppo di $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$. Descrivere le classi laterali di G in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Che gruppo è il gruppo quoziente $(\mathbb{Q} \setminus \{0\})/G$?

6. Nel gruppo $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ si consideri il sottoinsieme $H = \{-1, 1\}$. Provare che H è un sottogruppo normale e dire chi è il gruppo quoziente $(\mathbb{Q} \setminus \{0\})/H$.

7. Sia A un anello finito. Provare che se A è un dominio d'integrità, allora A è un campo.

8. Sia A un anello finito. Provare che allora gli elementi di A o sono invertibili, o sono divisori dello zero.

9. Provare, usando il piccolo teorema di Fermat, che 253 non è un numero primo (può essere d'aiuto sapere che $2^8 \equiv 3 \bmod 253$ e $3^{31} \equiv 179 \bmod 253$).