

ALGEBRA 2  
Esercizi 8 - 5 dicembre 2022

PREMESSA: L'ANELLO QUOZIENTE  $K[x]/I$

Sia  $K$  un campo. Ogni ideale di  $K[x]$  è principale, cioè generato da un elemento. Qui vogliamo elencare alcune proprietà dell'anello quoziente  $K[x]/I$  fatto rispetto ad un ideale  $I = (f)$  non banale di  $K[x]$  (quindi con  $\deg(f) \geq 1$ ).

Ricordare che:

- In  $K[x]$  si possono dividere gli elementi, cioè, dati  $f, g \in K[x]$ ,  $f \neq 0$  esistono unici  $q, r \in K[x]$  tali che  $g = qf + r$  dove  $\deg(r) < \deg(f)$ .
- In  $K[x]$  un elemento  $f$  è primo se e solo se è irriducibile. Si dimostra facilmente che  $K[x]/(f)$  è campo se e solo se  $f$  è irriducibile (= primo).
- In  $K[x]$  gli ideali primi coincidono con gli ideali massimali.

Gli elementi del quoziente  $K[x]/(f)$  sono classi. Una classe  $[g]$ , rappresentata da un elemento  $g$ , è l'insieme

$$g + (f) = \{g + \alpha f \mid \alpha \in K[x]\}$$

Due polinomi  $g$  e  $g'$  danno la stessa classe se e solo se  $f$  divide  $g - g'$ . Una classe  $[g]$  è rappresentata in modo unico dal polinomio  $r$ , dove  $r$  è il resto della divisione di  $g$  per  $f$ . Infatti, se abbiamo che  $[g] = [g']$  e se il resto della divisione di  $g$  per  $f$  è  $r$ , mentre il resto della divisione di  $g'$  per  $f$  è  $r'$ , allora  $g - g'$  è multiplo di  $f$ . Quindi, essendo  $g = qf + r$  e  $g' = q'f + r'$ , risulta che  $r - r'$  è multiplo di  $f$ , ma poiché è di grado minore del grado di  $f$ , deve essere  $r - r' = 0$ . Pertanto (le classi dei) polinomi di grado minore del grado di  $f$  possono essere usati come rappresentanti canonici degli elementi di  $K[x]/(f)$ . Si ripete quindi quanto si fa per l'anello  $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/(m)$  nel quale gli elementi sono rappresentati da  $[0], [1], \dots, [m-1]$ , che sono i possibili resti della divisione dei numeri interi per  $m$ .

L'anello quoziente  $K[x]/(f)$  contiene una copia isomorfa di  $K$ , infatti le classi  $[a]$ , con  $a \in K$  sono univocamente determinate da  $a$  (se  $[a] = [b]$ , con  $a, b \in K$ , allora  $a - b$  è multiplo di  $f$ , ma essendo  $f$  di grado almeno 1, deve essere  $a - b = 0$ , cioè  $a = b$ ).

Si vede allora che  $K[x]/(f)$  è uno spazio vettoriale su  $K$  (la somma è data dalla somma definita nell'anello quoziente  $K[x]/(f)$ , mentre il prodotto  $a \cdot [g]$  è definito da  $[ag]$ ). Se inoltre  $f$  è un polinomio di grado  $n$ , allora tutti i possibili resti della divisione di un polinomio per  $f$  sono della forma:  $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$  e quindi in  $K[x]/(f)$  gli elementi sono della forma  $a_0 + a_1[x] + \dots + a_{n-1}[x^{n-1}]$ , quindi sono combinazioni lineari, con coefficienti in  $K$ , di  $[1], [x], \dots, [x^{n-1}]$ . Inoltre questi  $n$  elementi sono linearmente indipendenti su  $K$  (se una loro combinazione lineare  $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$  vale 0, significa che  $(f)$  contiene un polinomio di grado minore di  $n$  e questo accade se e solo se  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ ).

Pertanto  $K[x]/(f)$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n = \deg(f)$  con base  $[1], [x], \dots, [x^{n-1}]$ .

Infine, se  $[g] = [g']$ , si usa anche scrivere  $g \equiv g' \pmod{(f)}$ .

Quando non c'è ambiguità, gli elementi di  $K[x]/(f)$  si indicheranno omettendo il simbolo di classe (quindi si scriverà, ad esempio,  $x$ ,  $x^2$ ,  $x+1$ , ... al posto di  $[x]$ ,  $[x^2]$ ,  $[x+1]$ , ...).

Ciò premesso,

### Esercizi

1. Trovare tutti gli elementi invertibili e i divisori dello zero di  $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1)$ .
2. Sia  $f \in \mathbb{Q}[x]$  dato da  $f = x^2 + 2$ . Dopo aver provato che  $f$  è irriducibile, dare una formula per calcolare l'inverso di ogni elemento (non nullo)  $a_0 + a_1x$  di  $\mathbb{Q}[x]/(f)$ . Dare la tabella di moltiplicazione di  $\mathbb{Q}[x]/(f)$  espressa rispetto alla base  $[1], [x]$ .
3. Sia  $f = x^2 - 4 \in \mathbb{Q}[x]$ . Trovare tutti gli ideali massimali di  $\mathbb{Q}[x]$  che contengono  $I = (f)$ .
4. Trovare un anello (non campo) della forma  $\mathbb{Q}[x]/(f)$  (con  $f$  opportuno) che contenga un solo ideale massimale.
5. Sia  $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 2)$ . Dopo aver provato che  $K$  è un campo, dire quanti elementi ha e provare che  $K^* = K \setminus \{0\}$  è, rispetto al prodotto, un gruppo ciclico.
6. Sia  $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ . Provare che  $K$  è un campo perfetto. Trovare la radice cubica di  $x + 2$ .