ALGEBRA 2

Esercizi 8 - 4 dicembre 2020

Qui trovate 12 esercizi, divisi in tre categorie. Vi chiedo di formare tra di voi dei gruppetti di 3, 4 persone. Ogni gruppo deve scegliere e risolvere almeno un esercizio nella categoria 1, almeno uno nella categoria 2 e almeno 1 nella categoria 3. Nel corso della lezione di lunedì 14 dicembre chiedo ad ogni gruppo di studenti di presentare e discutere le soluzioni.

Caterogia 1

1. Provare che l'ideale $(x+1, y+2) \subseteq \mathbb{Z}_7[x, y]$ è un ideale massimale.
2. Provare che l'ideale $(x^2+4, y^2+4) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ non è un ideale massimale. Trovare tutti gli ideali massimali che lo congengono.
3. Provare che l'ideale $(x+1, y^2+3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ è un ideale primo ma non massimale.
4. Provare che $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] \subseteq \mathbb{R}$ è un campo. Osservare che gli elementi di $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ sono tutti della forma $a + b\sqrt{3}$ (con $a, b \in \mathbb{Q}$). Dato allora $a + b\sqrt{3} \neq 0$, trovare una formula per il suo inverso.

Categoria 2

1. Trovare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ dei seguenti numeri reali:
$$\sqrt{5+2\sqrt{5}}, \quad \sqrt{11+6\sqrt{2}}.$$
2. Provare che vale:
$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}+\sqrt{3}\right].$$
3. Quali sono i possibili gradi dei polinomi minimi su $\mathbb{R}$ di elementi di $\mathbb{C}$?
4. Fissato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, trovare un numero reale a_n che ha polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di grado n.

Categoria 3

1. Si supponga che il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di un numero complesso a sia $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Sia poi b un'altra radice in $\mathbb{C}$ dell'equazione $f(x) = 0$. Qual è il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di b?
2. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ sul campo $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.
3. Sia $K = \mathbb{Z}_3[t]/(t^2+1)$. Provare che K è un campo che contiene come sottocampo $\mathbb{Z}_3$. Sia $a = [t+1] \in K$. Trovare il polinomio minimo di a su $\mathbb{Z}_3$.
4. Sia K un campo e L il campo delle frazioni dell'anello di polinomi $K[t]$. Provare che t è trascendente su K.