ALGEBRA 2

Esercizi 6 - 31 ottobre 2023

FATTORIZZARE UN POLINOMIO IN $\mathbb{Q}[x]$: IL METODO DI KRONECKER.

Vedremo a lezione il seguente risultato:

Teorema. Se $m_0, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ sono $n+1$ numeri a due a due distinti e se $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ sono altri $n+1$ numeri interi, allora esiste un unico polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ di grado al più n tale che $f(m_i) = a_i$ per $i = 0, \ldots, n$.

Pertanto le $n+1$ coppie (m_i, a_i) (con $i = 0, \ldots, n$) individuano un unico polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ di grado al più n.

Seguendo passo passo i seguenti esercizi, alla fine si dovrebbe essere in grado di enunciare un metodo che, in un numero finito di passi, riesce a trovare un fattore proprio di un polinomio in $\mathbb{Q}[x]$ (o $\mathbb{Z}[x]$). Applicando più volte tale metodo, si riesce quindi a fattorizzare, in un numero finito di passi, un qualunque polinomio di $\mathbb{Q}[x]$ (o di $\mathbb{Z}[x]$).

Esercizio 1. Dimostrare il teorema di sopra per $n = 1$. Mostrare anche che il polinomio che si ottiene è di grado ≤ 1 ma non necessariamente 1. Trovare il polinomio $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ di grado ≤ 1 tale che $h(3) = 1$ e $h(4) = 2$.

Partiamo dal seguente esempio: $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e vogliamo vedere se ha fattori (di grado 1). La prima osservazione è che se $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ allora $f(a) = g(a) \cdot h(a)$ per ogni $a \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Calcolando $f(3)$ si ottiene 2, mentre $f(4) = 6$. Quali sono allora i possibili valori che può avere $g(3)$? O $g(4)$?

Esercizio 3. Come si possono sfruttare tutte le informazioni fin qui presentate per trovare g (o h?).

Esercizio 4. Si riesce a fattorizzare il polinomio $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$, sfruttando per esempio il fatto che $f(1) = 2$ e $f(-2) = 5$?

Esercizio 5. Se $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ è un polinomio di grado n riducibile, entro quale grado si troverà sicuramente un suo fattore?

Esercizio 6. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due polinomi di $\mathbb{Q}[x]$, come si può verificare se $g(x)$ è un fattore di $f(x)$? (Esempio: se $f(x) = x^4 - 2x^3 - 16x^2 - 11x - 2$, qual è un modo per vedere (abbastanza velocemente) se $g(x) = x^2 + 3x + 1$ è un suo fattore?)

Esercizio 7. Cercando di generalizzare quanto trovato negli esercizi precedenti, si riesce a descrivere un metodo che in un numero finito di passi, trova un fattore di un polinomio di $\mathbb{Q}[x]$ (ammesso ne abbia uno)?