Algebra 2

Esercizi 4 - 31 ottobre 2022

1. Ricordare che l'ordine di un elemento $g \neq 1$ di un gruppo G è definito come quel numero $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ minimo possibile tale che $g^n = 1$ (Se g^n è sempre diverso da 1, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora si dice che g ha ordine infinito). Sia G un gruppo finito di ordine n. Provare che ogni elemento di G ha ordine finito, divisore di n. Provare che se $g \in G$ è di ordine n e se $g^m = 1$, allora n divide m.

2. Siano m e n due numeri interi positivi. Sia $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ definita da $\phi(a) = ([a]_m, [a]_n)$. Provare che ϕ è un omomorfismo di anelli. Provare che $\ker(\phi) = (\mathrm{mcm}(m, n))$. Provare che $\mathbb{Z}_{mn}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ se e solo se m ed n sono coprimi.

3. Si consideri il gruppo simmetrico S_4 (sul sito `https://www.dmi.units.it/~logar/didattica/algebra2/` si può trovare, sotto la voce "Esempi utili", un elenco di varie caratteristiche di S_4), si scelgano due 3-Sylow sottogruppi e si provi che sono coniugati.

4. Sia C_2 il gruppo ciclico di ordine 2 (quindi possiamo assumere che C_2 sia $\{1, a\}$ dove $a^2 = 1$) e sia S_3 il gruppo simmetrico di 3 oggetti. Sia infine $G = S_3 \times C_2$ il gruppo prodotto (gli elementi sono coppie (α, β) con $\alpha \in S_3$, $\beta \in C_2$ e il prodotto di G è definito componente per componente, quindi $(\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\alpha \cdot \alpha', \beta \cdot \beta')$). Si trovino tutti gli elementi di G di ordine 3 e di ordine 4, si trovino tutti i 2-Sylow sottogruppi di G e si verifichi che il loro numero è coerente con quanto previsto dal III teorema di Sylow.

5. Sia G un gruppo di 143 elementi. Trovare tutti i sottogruppi normali di G. Dimostrare che, a meno di isomorfismi, c'è un unico gruppo di ordine 143. Dare un modello per tale gruppo.