

ALGEBRA 2
Esercizi 4 - 31 ottobre 2019

1. Si ricordi che un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ si dice primitivo se i suoi coefficienti sono interi e se il m.c.d. dei coefficienti vale 1. Provare che se $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ sono primitivi, allora il prodotto ab è primitivo.
2. siano $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$ due polinomi di $\mathbb{Q}[x]$. Si calcoli, usando la divisione e quindi l'algoritmo di Euclide (come nel caso di numeri interi) il massimo comun divisore $d(x)$ di f e g . Si trovino poi $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $d = \alpha \cdot f + \beta \cdot g$.
3. Si consideri in $\mathbb{Z}[x]$ l'insieme $I = \{2f + xg \mid f, g \in \mathbb{Z}[x]\}$. Si provi che
 - (a) I è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$;
 - (b) $2 \in I$, $x \in I$;
 - (c) I non è un ideale principale.¹
4. Ci sono elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{16}[x]$ di grado 1?

¹Suggerimento: Si supponga che $I = (a)$ con $a \in \mathbb{Z}[x]$. Allora $2 \in (a)$ quindi che grado può avere a ? a può essere unitario? Inoltre deve succedere che $x \in (a)$. Questo cosa comporta?