

ALGEBRA 2
Esercizi 3 - 30 ottobre 2021

1. Provare che, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $5n^9 + 3n^8 + 2n^3 + 4n^2 + 14$ è un multiplo di 7.
2. Ricordando che con ϕ si indica la funzione di Eulero, calcolare $\phi(21)$ e determinare poi $5^{25} \bmod 21$.
3. Siano p e q due numeri primi. Calcolare $\phi(pq)$.
4. Sia G un gruppo e siano H e K due suoi sottogruppi normali. Provare che l'applicazione $\psi : G \rightarrow G/H \times G/K$ data da $\psi(g) = ([g]_H, [g]_K)$ (dove $G/H \times G/K$ è il gruppo prodotto) è un omomorfismo di gruppi.
5. Sia G un gruppo di ordine 221. Quanti sono i suoi sottogruppi normali? Usando opportunamente l'esercizio precedente, dedurre che G è isomorfo al prodotto di due gruppi ciclici e quindi è un gruppo commutativo. Quale?
6. Sia G un gruppo di ordine 45. Provare che G ha un sottogruppo normale di ordine 9.
7. Può darsi che qualcuno dei precedenti esercizi non sia corretto. Se è così, indicare quale.