ALGEBRA 2

Esercizi 3 - 30 ottobre 2020

1. Ripercorrendo la dimostrazione del teorema cinese del resto, trovare tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 2 \mod 4 \\ x \equiv 1 \mod 5 \end{cases}$$

2. Qual è il resto della divisione di 4^{301} quando viene diviso per 7?

3. Provare che $7n^{21} + 3n^{11} + n + 121$ è divisibile per 11 per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

4. Verificare che l'ordine di 2 in $\mathbb{Z}_{511}$ è 9. Usando questa informazione e il piccolo teorema di Fermat, provare che 511 non è un numero primo.

5. siano $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$ due polinomi di $\mathbb{Q}[x]$. Si calcoli, usando la divisione e quindi l'algoritmo di Euclide (come nel caso di numeri interi) il massimo comun divisore $d(x)$ di f e g. Si trovino poi $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $d = \alpha \cdot f + \beta \cdot g$.

6. Si consideri in $\mathbb{Z}[x]$ l'insieme $I = \{2f + xg \mid f, g \in \mathbb{Z}[x]\}$. Si provi che
   (a) I è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$;
   (b) $2 \in I$, $x \in I$;
   (c) I non è un ideale principale. [1]

7. Ci sono elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{16}[x]$ di grado 1?

[1] Suggerimento: Si supponga che $I = (a)$ con $a \in \mathbb{Z}[x]$. Allora $2 \in (a)$ quindi che grado può avere a? a può essere unitario? Inoltre deve succedere che $x \in (a)$. Questo cosa comporta?