Algebra 2

Esercizi 8 - 2 dicembre 2019

1. Provare che $K = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x+1)$ è un campo. Sia $G = K \setminus \{0\}$. Provare che il gruppo G (la struttura di gruppo è data dall'operazione di prodotto di K) è un gruppo ciclico.

2. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$. Provare che K è un campo. Considerare il gruppo $G = K \setminus \{0\}$ (come nell'esercizio precedente) e calcolare l'ordine degli elementi del gruppo G. Dedurre che G anche ora è ciclico.

3. Si considerino i due campi $K_1 = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$ e $K_2 = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+x+2)$. Provare che sono due campi isomorfi. Se proprio necessario, guardare i suggerimenti.[1]

[1] Suggerimenti:

1) Trovare un omomorfismo $\phi : \mathbb{Z}_2[x] \longrightarrow K_2$ che sia suriettivo e calcolare il suo nucleo.

2) Ricordare che per trovare un omomorfismo basta stabilire il valore di $\phi(x)$.

3) Il valore di $\phi(x)$ è del tipo: $[a + bx]$ con $a, b \in \mathbb{Z}_2$

4) Si tratta di scegliere allora a, b opportuni, in modo che ϕ sia suriettivo ed abbia nucleo $(x^2 + 1)$.