Algebra 2

Esercizi 2 - 24 ottobre 2020

1. Sia $a \in \mathbb{N}$ e $p$ primo. Provare (usando induzione) che $a^p \equiv a \bmod p$.

2. Provare che se $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a$ e $b$ sono primi tra loro (quindi il loro massimo comun divisore vale 1) e se $a|bc$, allora $a|c$.

3. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ primi tra loro (quindi il loro massimo comun divisore vale 1). Sia $c \in \mathbb{Z}$. Provare che se $a|c$ e $b|c$, allora $ab|c$. Provare che l'affermazione non è vera se $a$ e $b$ non sono primi tra loro.

4. Siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Provare che se $m$ ed $n$ non sono primi tra loro, allora $\mathbb{Z}_{mn}$ non è isomorfo a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

5. Sia $G$ un gruppo di ordine 51. Dire quanti sottogruppi normali ha $G$. Sia $H$ un sottogruppo normale proprio di $G$. Provare che $G/H$ è abeliano.

6. (facoltativo) Sia $G$ un gruppo di ordine $p^2q$ dove $p$ e $q$ sono primi distinti. Cosa si riesce a dire riguardo ai sottogruppi normali di $G$?

7. (facoltativo) Si considerino le seguenti tre matrici (a coefficienti in $\mathbb{C}$):

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Osservato che sono tre elementi di $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$, trovare il loro ordine.

   (b) Sia $G_1$ il gruppo generato da $M_1$ e $M_2$. Quanti elementi ha $G_1$?

   (c) Sia $G_2$ il gruppo generato da $M_2$ e $M_3$. Quanti elementi ha $G_2$? Gli elementi di $G_1$ e di $G_2$ possono essere pensati come delle proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (nel seguente modo: se $M \in G_2$, al punto $P(x, y, z) \in \mathbb{P}^2$ la proiettività data da $M$ associa il punto $M\,{}^t(x, y, z)$). Far vedere che i gruppi $G_1$ e $G_2$ sono isomorfi, rispettivamente, al gruppo delle permutazioni $S_3$ e al gruppo diedrale $D_4$, delle simmetrie di un quadrato.[1] (In alternativa, se non si ha familiarità con la geometria proiettiva, pensare agli elementi di $G_1$ e $G_2$ come matrici di cambiamento di coordinate nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$).

---

[1] Suggerimento: Considerare i punti: $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ e l'effetto delle matrici di $G_1$ e $G_2$ su tali punti.