ALGEBRA 2

Esercizi 2 - 23 ottobre 2021

1. Sia $a \in \mathbb{N}$ e p primo. Provare (usando induzione) che $a^p \equiv a \mod p$.

2. Provare che se $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se a e b sono primi tra loro (quindi il loro massimo comun divisore vale 1) e se $a|bc$, allora $a|c$.

3. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ primi tra loro (quindi il loro massimo comun divisore vale 1). Sia $c \in \mathbb{Z}$. Provare che se $a|c$ e $b|c$, allora $ab|c$. Provare che l'affermazione non è vera se a e b non sono primi tra loro.

4. Siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Provare che se m ed n non sono primi tra loro, allora $\mathbb{Z}_{mn}$ non è isomorfo a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

5. Trovare tutte le soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 1 \mod 5 \end{cases}$$

6.* Sia $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ fissato, sia X_r l'intervallo $[0, r]$ della retta reale. Sia $A_r = \{f : X_r \longrightarrow \mathbb{R}\}$ (cioè l'insieme di tutte le funzioni da X_r in $\mathbb{R}$). Dati $f, g \in A_r$, si definisca $f + g$ la funzione tale che $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e analogamente per il prodotto. Provare che A_r con la somma e il prodotto ora detti, è un anello commutativo, unitario. Chi sono gli elementi invertibili di A_r?
In particolare in A_2 si prenda la funzione

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{se } x \in]1, 2] \end{cases}$$

Come si può descrivere l'ideale (u), cioè l'ideale generato da u? Come si può descrivere l'anello quoziente $A_2/(u)$?