

ALGEBRA 2  
Esercizi 3 - 21 ottobre 2022

1. Sia  $A$  un anello finito. Provare che se  $A$  è un dominio di integrità, allora  $A$  è un campo.
2. Sia  $A$  un anello finito. Provare che gli elementi di  $A$  o sono invertibili o sono divisori dello zero.
3. Sia  $a \in \mathbb{N}$  e  $p \in \mathbb{N}$  primo. Provare *con il metodo di induzione* che

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

4. Trovare tutte le soluzioni in  $\mathbb{Z}$  del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

5. Provare che se  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , se  $a$  e  $b$  sono primi tra loro (quindi il loro massimo comun divisore vale 1) e se  $a|bc$ , allora  $a|c$  (Non usare eventuali fattorizzazioni dei numeri interi).
6. Siano  $a, b \in \mathbb{Z}$  primi tra loro (quindi il loro massimo comun divisore vale 1). Sia  $c \in \mathbb{Z}$ . Provare che se  $a|c$  e  $b|c$ , allora  $ab|c$ . Provare che l'affermazione non è vera se  $a$  e  $b$  non sono primi tra loro (Non usare eventuali fattorizzazioni dei numeri interi).
7. Provare che per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  il numero:

$$3n^{31} + n^{25} + 2n^{12} - 2n^6 + 3n$$

è divisibile per 7.

8. Provare che se  $p$  e  $q$  sono due numeri primi distinti, allora

$$\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$$

(dove  $\phi$  è la funzione di Eulero).