

ALGEBRA 2
Esercizi 3 - 21 ottobre 2022

1. Sia A un anello finito. Provare che se A è un dominio di integrità, allora A è un campo.
2. Sia A un anello finito. Provare che gli elementi di A o sono invertibili o sono divisori dello zero.
3. Sia $a \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$ primo. Provare *con il metodo di induzione* che

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

4. Trovare tutte le soluzioni in \mathbb{Z} del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

5. Provare che se $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se a e b sono primi tra loro (quindi il loro massimo comun divisore vale 1) e se $a|bc$, allora $a|c$ (Non usare eventuali fattorizzazioni dei numeri interi).
6. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ primi tra loro (quindi il loro massimo comun divisore vale 1). Sia $c \in \mathbb{Z}$. Provare che se $a|c$ e $b|c$, allora $ab|c$. Provare che l'affermazione non è vera se a e b non sono primi tra loro (Non usare eventuali fattorizzazioni dei numeri interi).
7. Provare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ il numero:

$$3n^{31} + n^{25} + 2n^{12} - 2n^6 + 3n$$

è divisibile per 7.

8. Provare che se p e q sono due numeri primi distinti, allora

$$\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$$

(dove ϕ è la funzione di Eulero).