ALGEBRA 2

Esercizi 3 - 21 ottobre 2019

1. Ripercorrendo la dimostrazione del teorema cinese del resto, trovare tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 2 \mod 4 \\ x \equiv 1 \mod 5 \end{cases}$$

2. Si consideri il gruppo abeliano moltiplicativo $G = \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ (il prodotto è dato dal prodotto definito in $\mathbb{Z}_7$). Trovare l'ordine di tutti i suoi elementi.

3. Si consideri il gruppo abeliano additivo $G = \mathbb{Z}_7$. Trovare l'ordine di tutti i suoi elementi (attenzione alla notazione additiva: se $g \in G$, si devono cercare numeri n tali che ng vale 0, non $g^n = 1$).

4. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo abeliano e siano $g, h \in G$ di ordine, rispettivamente, m ed n, con m ed n primi tra loro. Trovare l'ordine di gh.

5. Qual è l'ordine massimo di un elemento del gruppo additivo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$? Provare quindi che il gruppo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ non è isomorfo al gruppo $\mathbb{Z}_8$.

6. Qual è il resto della divisione di 4^{301} quando viene diviso per 7?

7. Provare che $7n^{21} + 3n^{11} + n + 121$ è divisibile per 11 per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

8. Verificare che l'ordine di 2 in $\mathbb{Z}_{511}$ è 9. Usando questa informazione e il piccolo teorema di Fermat, provare che 511 non è primo.

9. Sia G un gruppo di ordine 221. Quanti sono i sottogruppi normali di G?

10. Sia S_3 il gruppo delle permutazioni di tre oggetti e sia $(C_2, \cdot)$ il gruppo ciclico moltiplicativo di ordine 2 (quindi $C_2 = \{1, a\}$ con $a \cdot a = 1$). Trovare tutti i 2-Sylow sottogruppi di $S_3 \times C_2$.