Algebra 2

Esercizi 4 - 20 ottobre 2023

1. Siano m e n due numeri interi positivi. Sia $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ definita da $\phi(a) = ([a]_m, [a]_n)$. Provare che ϕ è un omomorfismo di anelli. Provare che $\ker(\phi) = (\mathrm{mcm}(m, n))$. Provare che $\mathbb{Z}_{mn}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ se e solo se m ed n sono coprimi.

2. Sia C_2 il gruppo ciclico di ordine 2 (quindi possiamo assumere che C_2 sia $\{1, a\}$ dove $a^2 = 1$) e sia D_3 il gruppo diedrale del triangolo equilatero. Sia infine $G = D_3 \times C_2$ il gruppo prodotto (gli elementi sono coppie (α, β) con $\alpha \in D_3$, $\beta \in C_2$ e il prodotto di G è definito componente per componente, quindi $(\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\alpha \cdot \alpha', \beta \cdot \beta')$). Si trovino tutti gli elementi di G di ordine 3 e di ordine 4, si trovino tutti i 2-Sylow sottogruppi di G e si verifichi che il loro numero è coerente con quanto previsto dal III teorema di Sylow.

3. Quanti polinomi di grado n ha l'anello di polinomi $\mathbb{Z}_4[x]$? Trovare tutti i divisori dello zero di grado 1 di $\mathbb{Z}_4[x]$.

4. Ci sono elementi invertibili di $\mathbb{Z}_8[x]$ di grado 1?

5. Il teorema di unicità di quoziente e resto nella divisione di un polinomio g per un polinomio f in $A[x]$ (dove A è un anello) richiede che il coefficiente direttivo di f sia invertibile. Si considerino ora i seguenti polinomi $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_8[x]$: $f = 2x + 1$, $g = 4x + 1$. Scrivere $g = qf + r$ in due modi diversi (con $\deg(r) < \deg(f)$) (ovviamente in questo caso il coefficiente direttivo di f non è invertibile).

6. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ l'omomorfismo dato da $\phi(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$ e $\phi(x) = 2x + 3$ (e poi estesa nell'unico modo possibile). Provare che ϕ è un isomorfismo e trovare il suo inverso.

7. Trovare tutti gli automorfismi $\psi : \mathbb{Z}_7[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_7[x]$ tali che $\psi(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Z}_7$.