Algebra 2

Esercizi 10 - 1 dicembre 2023

1. Sia $I = (x + 2y, 3x - y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ e sia $J = (x, y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$. Provare che $I = J$. Provare che se $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ è un polinomio il cui termine noto è non nullo, allora f non sta nell'ideale I.

2. Provare che l'ideale $(x - 3, x^2y + 1)$ di $\mathbb{Q}[x, y]$ coincide con l'ideale $(x-3, y+1/9)$. Provare quindi che $(x-3, x^2y+1)$ è massimale in $\mathbb{Q}[x, y]$.

3. Dire quanti elementi ha l'anello $A = \mathbb{Z}_3[x, y]/I$ dove $I = (x^2, xy, y^2)$. Trovare tutti i divisori dello zero di A.

4. Sia $I = (2, x) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ (quindi I è l'ideale generato da 2 e x). Provare che I non è principale. Provare che $\mathbb{Z}[x]/I$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Dedurre che, quindi, l'ideale I è massimale.

5. Provare che l'ìideale $(2x-1, y-3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ è primo ma non massimale. Trovare un ideale massimale che lo contiene.

6. Sia $\mathcal{M}$ un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x, y]$ che contiene l'ideale (x^2, y^3). Dire chi è l'ideale $\mathcal{M}$.

7. Sia A un anello (commutativo, unitario) e I un ideale di A. Sia J l'ideale in $A[x]$ generato dall'insieme I. Provare che

$$J = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_n \in I\}.$$

8. Sia A un anello (commutativo, unitario) e I un ideale di A. Sia poi

$$I[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_n \in I\}.$$

(Cioè $I[x]$ è l'ideale J dell'esercizio precedente). Provare che l'anello quoziente $A[x]/I[x]$ è isomorfo all'anello di polinomi $(A/I)[x]$.