Algebra 2

Esercizi 8 - 17 novembre 2023

1. Siano A e B due anelli (commutativi unitari) e si consideri l'anello prodotto $A \times B$ (i cui elementi sono coppie ordinate (a, b) e la somma e il prodotto sono definiti sulle componenti). Dire quando un elemento (a, b) è divisore dello zero di $A \times B$ e quando è un elemento invertibile.
   In particolare, elencare tutti i divisori dello zero e gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ e di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

2. Sia K un campo e siano $f_1, \ldots, f_n \in K[x]$ polinomi a due a due coprimi. Provare che l'anello quoziente $K[x]/(f_1 \cdots f_n)$ è isomorfo all'anello prodotto $K[x]/(f_1) \times \cdots \times K[x]/(f_n)$ (suggerimento: guardare l'analogo risultato visto nel caso di $\mathbb{Z}_m$).

3. Ricordando che, se K è un campo e $f \in K[x]$ è un polinomo di grado n, allora $K[x]/(f)$ è un K-spazio vettoriale di dimensione n, dire quanti elementi ha l'anello quoziente $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x + 1)$. Più in generale, dire quanti elementi ha l'anello $\mathbb{Z}_p[x]/(f)$ dove p è un numero primo e f è un polinomio di grado n.

4. Usando il teorema di Ruffini, trovare i fattori irriducibili del polinomio $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Usando gli esercizi precedenti, trovare i divisori dello zero di $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x + 1)$.

5. Sia K un campo e $f(x) \in K[x]$ dato da $f(x) = x - a$ con $a \in K$. Sia $\phi : K[x] \longrightarrow K$ data da $\phi(u) = u$ per ogni $u \in K$ e $\phi(x) = a$ e poi estesa a tutto $K[x]$ con il teorema di estensione. Provare che $K[x]/(f)$ è isomorfo a K (in questo modo di è provato che $K[x]/(f)$ è un campo, come deve essere, essendo f un polinomio irriducibile).

6. Si consideri l'anello $A = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 9)$, pertanto, gli elementi di A sono della forma $[ax + b]$ con $a, b \in \mathbb{Q}$. Provare che, se $a \neq 0$, allora $[ax + b]$ è invertibile se e solo se $[x + b/a]$ è invertibile mentre, se $a = 0$, allora $[b]$ è invertibile se e solo se $b \neq 0$. Per trovare tutti gli elementi invertibili di A basta allora cercare tutti gli invertibili della forma $[x + \alpha]$, con $\alpha \in \mathbb{Q}$. Trovare quindi quando un elemento di A della forma $[x + \alpha]$ è invertibile e trovare il suo inverso. È possible risolvere l'esercizio in modo diverso, usando gli esercizi 1 e 2?