Algebra 2

Esercizi 5 - 15 novembre 2021

1. Si ricordi che in un anello A, un ideale proprio I si dice *primo* se vale la seguente condizione: se $ab \in I$, allora $a \in I$ o $b \in I$. Provare che un numero $p \in \mathbb{Z}$ è primo se e solo se l'ideale (p) è un ideale primo.

2. Si ricordi che in un anello A, un ideale I si dice *massimale* se $I \neq (1)$ e se J è un ideale che contiene propriamente I, allora $J = (1)$. Provare che in $\mathbb{Z}$ e in $K[x]$ (con K campo) un ideale è primo se e solo se è massimale.

3. Sia p un numero primo e sia $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ la proiezione canonica e sia $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[x]$ l'estensione di π tale che $\phi(x) = x$. È vero che se $f \in \mathbb{Z}[x]$ è tale che $\phi(f)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$, allora f è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$?

4. Sia K un campo. Provare che se $f \in K[x]$ è irriducibile, allora il polinomio $g = f(x+1)$ è irriducibile. Cercare poi di generalizzare questo risultato (a proprio piacimento).

5. Trovare tutti i polinomi irriducibili di grado 2 di $\mathbb{Z}_3[x]$.

6. Provare che il polinomio $x^5 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ è irriducibile (conviene aiutarsi con il risultato dell'esercizio precedente).

7. Provare che $x^5 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ è irriducibile (conviene aiutarsi con il risultato dell'esercizio precedente).