Algebra 2

Esercizi 12 - 15 dicembre 2023

1. Provare che se K ed L sono campi, con L estensione di K e se $a \in L$ è algebrico su K di grado n, allora $a+1$ è algebrico su K sempre di grado n.

2. Si dia un esempio di un elemento $a \in \mathbb{R}$ che sia algebrico di grado 4 su $\mathbb{Q}$ e tale che a^2 sia algebrico di grado 2 (sempre su $\mathbb{Q}$).

3. Sia $r = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$. Provare che r è algebrico su $\mathbb{Q}$ e trovare il suo polinomio minimo. Ripetere lo stesso esercizio per $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

4. Mostrare che $\mathbb{C}$ è un'estensione algebrica di $\mathbb{R}$.

5. Sia K un campo finito con 2^5 elementi. Provare che ogni elemento non nullo di K è primitivo.

6. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$. Spiegare perché K è un campo perfetto. Trovare un elemento $a \in K$ tale che $a^3 = [2x + 1]$.

7. Si consideri ancora il campo $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$. Sia $t^2 + 1 \in K[t]$ (t una nuova variabile). Si scriva la fattorizzazione in $K[t]$ di $t^2 + 1$.

8. I polinomi $f = x^2+1$ e $g = x^2+x+2$ di $\mathbb{Z}_3[x]$ sono irriducibili (giustificare questa affermazione nel modo più rapido possibile), quindi $K_1 = \mathbb{Z}_3[x]/(f)$ e $K_2 = \mathbb{Z}_3[x]/(g)$ sono due campi. Trovare un isomorfismo tra i due campi. (Suggerimento: trovare il polinomio minimo di $[x + 1] \in K_1$ su $\mathbb{Z}_3$ e studiare l'omomorfismo $\mathbb{Z}_3[x] \longrightarrow K_1$ che fissa gli elementi di $\mathbb{Z}_3$ e manda $x \in \mathbb{Z}_3[x]$ in $[x + 1] \in K_1$).