Algebra 2

Esercizi 2 - 14 ottobre 2022

1. Sia G un insieme finito in cui è definito un prodotto che è associativo e possiede un elemento unitario. Si supponga inoltre che per il prodotto di G valga la seguente proprietà: per ogni g, h, k, se $gh = gk$ allora $h = k$. Provare che G è un gruppo.

2. Si consideri il seguente elemento del gruppo S_4 (gruppo delle permutazioni di 4 elementi indicati con $1, 2, 3, 4$):

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   Si trovi l'inverso di g.

3. Si ricordi che, dato il gruppo delle permutazioni S_n, si chiama *scambio* di S_n una permutazione che lascia fissi tutti gli elementi di S_n tranne due (diciamo a e b), che vengono scambiati tra loro. Uno scambio di a e b si indica di solito con (a, b). Ad esempio $(2, 5)$ in S_5 è la permutazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

   Uno scambio si chiama anche un 2-*ciclo*. Considerate le seguenti due permutazioni (di S_3 e S_5) date da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

   scriverle come prodotto di scambi.

4. Il gruppo G ha 12 elementi: $1, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ che si moltiplicano tra loro secondo la seguente tabella di moltiplicazione:

$\cdot$	1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
1	1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	a	1	c	b	g	f	e	d	j	k	h	i
b	b	c	1	a	e	d	g	f	k	j	i	h
c	c	b	a	1	f	g	d	e	i	h	k	j
d	d	e	f	g	h	i	j	k	1	a	b	c
e	e	d	g	f	k	j	i	h	b	c	1	a
f	f	g	d	e	i	h	k	j	c	b	a	1
g	g	f	e	d	j	k	h	i	a	1	c	b
h	h	i	j	k	1	a	b	c	d	e	f	g
i	i	h	k	j	c	b	a	1	f	g	d	e
j	j	k	h	i	a	1	c	b	g	f	e	d
k	k	j	i	h	b	c	1	a	e	d	g	f

(la tabella va letta in questo modo: il prodotto $x \cdot y$ è dato dal punto d'incontro della riga che comincia con la x con la colonna che ha per primo valore in alto la y. Ad esempio $c \cdot e = g$). Provare che il gruppo G non è commutativo. Trovare l'ordine dell'elemento a e dell'elemento d. Provare che il sottoinsieme $H = \{1, a, b, c\}$ di G è un sottogruppo. Trovare i laterali destri di H e i laterali sinistri. Verificare che H è normale. Trovare la tabella di moltiplicazione del gruppo G/H.
Sia $K = \{1, a\}$. Provare che K è un sottogruppo di G. Trovare i laterali destri di K. Calcolare Kd e dK e dedurre che K non è un sottogruppo normale.

5. Sia $G = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$. Provare che G è un sottogruppo di $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$. Descrivere le classi laterali di G in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Che gruppo è il gruppo quoziente $(\mathbb{Q} \setminus \{0\})/G$?

6. Nel gruppo $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ si consideri il sottoinsieme $H = \{-1, 1\}$. Provare che H è un sottogruppo e dire chi è il gruppo quoziente $(\mathbb{Q} \setminus \{0\})/H$.

7. * Nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si consideri il sottoinsieme
$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$
(dove $|z|$ indica il modulo di z, i.e. se $z = a + ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$). Provare che H è un sottogruppo di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Provare che $\mathbb{R}^+$ (i.e. l'insieme dei numeri reali positivi non nulli) è un gruppo moltiplicativo, sottogruppo di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e mostrare infine che $(\mathbb{C} \setminus \{0\})/H$ è isomorfo a $\mathbb{R}^+$.