ALGEBRA 2

Esercizi 5 - 14 novembre 2022

1. Siano $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$ due polinomi di $\mathbb{Q}[x]$. Si calcoli, usando la divisione e quindi l'algoritmo di Euclide (come nel caso di numeri interi) il massimo comun divisore $d(x)$ di f e g. Si trovino poi $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $d = \alpha \cdot f + \beta \cdot g$.

2. Quanti polinomi di grado n ha l'anello di polinomi $\mathbb{Z}_4[x]$? Trovare tutti i divisori dello zero di grado 1 di $\mathbb{Z}_4[x]$.

3. Ci sono elementi invertibili di $\mathbb{Z}_8[x]$ di grado 1?

4. Il teorema di unicità di quoziente e resto nella divisione di un polinomio g per un polinomio f in $A[x]$ (dove A è un anello) richiede che il coefficiente direttivo di f sia invertibile. Si considerino ora i seguenti polinomi $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_8[x]$: $f = 2x + 1$, $g = 4x + 1$. Scrivere $g = qf + r$ in due modi diversi (con $\deg(r) < \deg(f)$) (ovviamente in questo caso il coefficiente direttivo di f non è invertibile).

5. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'omomorfismo di valutazione che valuta x in 7, cioè ϕ è dato da $\phi(a) = a$ per $a \in \mathbb{Q}$ e $\phi(x) = 7$ (ed esteso nell'unico modo possibile). Calcolare $\ker(\phi)$.

6. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ l'omomorfismo dato da $\phi(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$ e $\phi(x) = 2x + 3$ (e poi estesa nell'unico modo possibile). Provare che ϕ è un isomorfismo e trovare il suo inverso.