

ALGEBRA 2
Esercizi 3 - 13 ottobre 2023

1. Sia $a \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$ primo. Provare *con il metodo di induzione* che

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

2. Trovare tutte le soluzioni in \mathbb{Z} del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

3. In S_4 si considerino i seguenti elementi:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare l'ordine di g e di h . Siano G e H i sottogruppi di S_4 generati da G e H . Spiegare perché G e H sono 3-gruppi di Sylow. Come tali, devono essere coniugati. Trovare allora $\sigma \in S_4$ tale che $G = \sigma H \sigma^{-1}$.

4. Si consideri il gruppo delle simmetrie del quadrato (gruppo diedrale D_4). Esprimere tutti i suoi elementi in termini di una riflessione e di una rotazione di 90° e verificare che D_4 ha 8 elementi. Provare che D_4 non è un gruppo ciclico.
5. Sia G un gruppo di 77 elementi. Dire quanti sottogruppi normali ha G .