Algebra 2

Esercizi 5 - 13 novembre 2020

1. Provare che il polinomio $x^5 + 15x^4 + 30x^2 + 45 \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile.

2. Sia $F : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ data da $F(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$ e $F(x) = 2x$ (e poi estesa in unico modo ad omomorfismo di anelli). Dimostrare che F è un isomorfismo dell'anello $\mathbb{Q}[x]$. Provare a generalizzare il risultato.

3. Provare che il polinomio $8x^3 + 16x^2 + 12x + 2$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

4. Sia $f \in \mathbb{Z}[x]$ non costante. Provare che per un numero infinito di interi n, $f(n)$ non è un numero primo.

5. Provare che $x^{11} + 10$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

6. Sia p un numero primo e sia $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ la proiezione canonica e sia $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[x]$ l'estensione di π tale che $\phi(x) = x$. È vero che se $f \in \mathbb{Z}[x]$ è tale che $\phi(f)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$, allora f è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$?