Algebra 2

Esercizi 1 - 10 ottobre 2018

1. Siano $(G_1, \cdot)$ e $(G_2, \cdot)$ due gruppi. Sull'insieme prodotto $G_1 \times G_2$ si definisca il *prodotto puntuale* dato da: $(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) \stackrel{\text{def}}{=} (g_1 \cdot h_1, g_2 \cdot h_2)$. Provare che l'insieme G con questo prodotto risulta un gruppo.

2. Sia G definito come sopra, provare che l'insieme $H = \{(g, 1_{G_2}) \mid g \in G_1\}$ è un sottogruppo normale di G. Chi è G/H?

3. Siano G_1 e G_2 due gruppi e sia $H_1 \triangleleft G_1$ un sottogruppo normale di G_1 e $H_2 \triangleleft G_2$ un sottogruppo normale di G_2. È vero che $H_1 \times H_2$ è un sottogruppo normale di $G_1 \times G_2$?

4. Sia $n \in \mathbb{N}$ fissato e sia $G = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid (a + ib)^n = 1\}$. Provare che G è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ (cioè del gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli). (Suggerimento: è utile conoscere le fomule di de Moivre). Che tipo di gruppo è G?

5. Sia $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con l'operazione di somma definita puntualmente (analogamente a quanto fatto nel primo esercizio). Sia $H = \{(2a, 3a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Provare che H è sottogruppo di G. Il sottogruppo H è normale? Chi è G/H?