

Corso di laurea in Geologia
Istituzioni di matematiche
a.a. 2014–15
Scritto 10 settembre 2015

Istruzioni per lo svolgimento:

Gli studenti dell'anno accademico 2014/15 che hanno superato il test intermedio, devono svolgere gli esercizi 4, 5, 6, 7, 8.

Gli studenti dell'anno accademico 2014/15 che non hanno superato il test intermedio, devono svolgere gli esercizi 1, il primo di 2 – a), il primo di 2 – b), 4, 5, 6, 7, 8.

Gli studenti degli anni accademici precedenti che devono superare l'esame di complementi di matematiche, devono svolgere gli esercizi 4, 5, 6, 7, 8.

Gli studenti degli anni accademici precedenti che devono superare l'esame di istituzioni di matematiche, devono svolgere gli esercizi 1, 2, 3.

Nome:	Cognome:
-------	----------

Anno di Corso:	Esame di:
----------------	-----------

Indicare gli esercizi che si dovrebbero svolgere:

Allegare il presente foglio all'elaborato consegnato.

1. Sia $f(x) = x^2 - 1$. Spiegare perché la funzione $f(x)$ è continua. Sia poi:

$$g(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \leq 0 \\ -2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Dire per quali valori di x la funzione $g(f(x))$ è continua.

2. Calcolare i seguenti limiti (*senza* usare la regola di de l'Hopital):

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{(x + 2) \sin^2(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3 \sin(x^2 + 3)}{\cos(x^2) + 3x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \cos(x + 1)}{\sin(2x - 2)}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 + 6} \right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - x \cos(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x}$$

3. Sia $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x + 2$. Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è definita la funzione $f(x)/(f(x)^2 - g(x)^2)$ e per quali valori di x è continua.
4. Sia $f(x) = x^3(\log(x^3) - 1)$. Per quali $x \in \mathbb{R}$ è definita $f(x)$? Calcolare $f'(x)/\log(x)$ (Con $\log(x)$ si intende il logaritmo naturale, cioè in base e).
5. Sia $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 20 \log(x + 3)$. Dire chi dei seguenti punti di \mathbb{R} è di massimo, chi di minimo e chi di flesso per il grafico della funzione $f(x)$: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.
6. Data la funzione reale di due variabili reali: $f(x, y) = xy + x^2$, calcolare il suo gradiente $\nabla f(x, y)$. Calcolare poi l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.
7. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int (\sin^2(x)) \cos(x) dx, \quad \int e^{x+1} e^{x+3} dx, \quad \int \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$$

8. Sia $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$. Calcolare:

$$\iint_D x^2 y dx dy$$