Formulario

Regole di derivazione:

$$
\begin{aligned}
D(f(x)+g(x)) &= D(f(x))+D(g(x)) \\
D(k\cdot f(x)) &= k\cdot D(f(x)) \\
D(f(x)g(x)) &= D(f(x))g(x)+f(x)D(g(x)) \\
D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{D(f(x))g(x)-f(x)D(g(x))}{g(x)^2} \\
D(k) \;=\; 0, &\qquad D(k\cdot f(x)) \;=\; k\cdot D(f(x)) \\
D(f(g(x))) &= f'(g(x))\cdot g'(x) \\
D(x^\alpha) &= \alpha x^{\alpha-1} \\
D(\sin(x)) \;=\; \cos(x), &\qquad D(\cos(x)) \;=\; -\sin(x) \\
D(\tan(x)) &= \frac{1}{\cos^2(x)} \;=\; 1+\tan^2(x) \\
D(e^x) \;=\; e^x, &\qquad D(\log(x)) \;=\; \frac{1}{x} \quad \text{(base } e\text{)} \\
D(\sqrt{x}) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
D(\arcsin(x)) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, &\qquad D(\arccos(x)) \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\
D(\arctan(x)) &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Regole di integrazione:

$$
\begin{aligned}
\int (f(x)+g(x))\,dx &= \int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx, \\
\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx, &\qquad \int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C, \\
\int \sin(x)\,dx=-\cos(x)+C, &\qquad \int \cos(x)\,dx=\sin(x)+C, \\
\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx=\tan(x)+C, &\qquad \int \frac{1}{x}\,dx=\log(|x|)+C, \\
\int e^x\,dx=e^x+C, &\qquad \int \log(x)\,dx=x\log(x)-x+C, \\
\int x^a\,dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C,\; a\neq-1, &\qquad \int \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C, \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin(x)+C, &\qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan(x)+C,
\end{aligned}
$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(|f(x)|) + C, \qquad \int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1} f(x)^{n+1} + C$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C,$$

Formula di integrazione per parti:

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,dx \quad = \quad f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \quad = \quad F(g(x)) + c \quad (\text{dove } F(x) \text{ è una primitiva di } f(x)).$$

Metodo di sostituzione (quando funziona):
Si pone $x = g(t)$ (con $g(t)$ derivabile, invertibile) e $dx = g'(t)\,dt$, allora

$$\int f(x)\,dx \quad = \quad \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Integrali definiti:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a) \qquad (\text{dove } F(x) \text{ è una primitiva di } f(x))$$

Regole per lo studio di una funzione

Per lo studio di una funzione, è bene cercare risposta ai seguenti punti (non è sempre possibile trovare tutte le risposte):

- Dove è definita la funzione (detto anche insieme di definizione o campo di esitenza). Regole utili:
  - un denominatore non può mai essere 0;
  - se un'espressione è dentro l'operatore di radice quadrata (o una radice ad indice pari), l'espressione stessa deve essere ≥ 0;
  - se un'espressione è dentro l'operatore di log, l'espressione deve essere > 0.
- Dove la funzione è positiva e dove è negativa (se fattibile);
- Eventuali punti notevoli;
- dove la funzione è crescente, dove è decrescente, eventuali punti di massimo e minimo relativo e assoluto. Regole utili:
  - Se in un intervallo la derivata della funzione è ≥ 0, (≤ 0), in quell'intervallo la funzione è crescente (risp. decrescente).

- Se c'è un punto x_0 tale che in esso la derivata si annulla, mentre alla sua sinistra la derivata è ≤ 0 e alla sua destra la sua derivata è ≥ 0, allora il punto è di minimo relativo;
- Se c'è un punto x_0 tale che in esso la derivata si annulla, mentre alla sua sinistra la derivata è ≥ 0 e alla sua destra la sua derivata è ≤ 0, allora il punto è di massimo relativo;
- Un altro modo per trovare i punti di minimo e massimo relativo è il seguente: se in x_0 la derivata della funzione si annulla, mentre la derivata seconda (sempre in x_0) è positiva, allora il punto è di minimo relativo; se invece la derivata seconda è nagativa, il punto è di massimo relativo.

• Concavità e convessità della funzione. Punti di flesso. Regole utili:

- Se in un intervallo la derivata seconda della funzione è ≥ 0, allora in quell'intervallo la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto: $\smile$, se la derivata seconda è ≤ 0, allora la funzione ha la concavità rivolta verso il basso: $\frown$. Non sempre è facile determinare il segno della derivata seconda;
- Se in x_0 la derivata seconda si annulla, mentre alla sua sinistra la derivata seconda è positiva e alla sua destra è negativa (o viceversa), x_0 è un punto di flesso.

• Eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Regole utili:

- Solitamente gli asintoti verticali vanno ricercati nei punti in cui si annullano dei denominatori. Se x_0 è un punto in cui un denominatore della funzione si annulla, va studiato il $\lim_{x\to x_0^-}$ e il $\lim_{x\to x_0^+}$ della funzione. Se uno dei due (o entrambi) sono infiniti, la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale;
- un altro caso di asintoti verticali si può avere per quei valori x_0 per cui l'argomento di un logaritmo tende a zero (da destra);
- gli asintoti orizzontali ci sono se il $\lim_{x\to+\infty}$ o il $\lim_{x\to-\infty}$ della funzione è finito;
- gli asintoti obliqui vanno cercati calcolando:

$$m = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x \quad \text{e, se esiste } m, \quad q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$$

  se sia m, sia q esistono e sono numeri finiti, la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo (stesso discorso per $\lim_{x\to-\infty}$).
- Se si sono trovati assintoti orizzontali, non ci possono essere asintoti obliqui.

• Tutti i dati trovati devono essere coerenti.